

Uitgerekend taal! Een onderzoek naar begripsproblemen bij wiskundeopgaven

JOANNEKE PRENGER

Tegenwoordig zijn bijna alle methoden die in het Nederlandse wiskundeonderwijs gebruikt worden gebaseerd op de ideeën van de Realistische Wiskunde. Volgens deze visie, ontwikkeld door Freudenthal, moeten leerlingen zelf de wiskunde (her)ontdekken. Leerlingen zouden actieve en betrokken leeders moeten zijn: de docent en het lesmateriaal zijn slechts begeleiders bij dit proces. Deze ideeën hebben er toe geleid dat wiskundeopgaven altijd geplaatst worden in een rijke context. Hierdoor is de hoeveelheid taal en tekst in wiskundeboeken sterk toegenomen. Zowel voor autochtone als allochtone taalzwakke leerlingen kan dit problemen opleveren. In dit artikel beschrijft de auteur over welke talige hindernissen leerlingen daadwerkelijk struikelen als ze hardop denkend een wiskundeopgave oplossen.

Taal in het wiskundeboek

In wiskundemethoden worden opgaven gepresenteerd in kleine verhaaltjes die voor leerlingen herkenbare situaties beschrijven. Een analyse van het taalgebruik in een wiskundeboek uit het eerste leerjaar, laat zien dat er veel laagfrequente dagelijkse woorden

worden gebruikt, zoals ‘vaargeul’, ‘brandglas’, ‘populier’ en ‘hartslag’. Van brugklasleerlingen hoeven we niet te verwachten dat ze deze woorden zullen kennen (Prenger, 2005; Prenger, 2006). Daarnaast valt de korte en bondige manier van formuleren in de wiskundeteksten op, waardoor het nog belangrijker is dat leerlingen alle woorden in de tekst begrijpen.

In het wiskundeboek treffen we dus heel wat potentiële talige struikelblokken voor leerlingen aan. In het onderzoek waarover in dit artikel verslag wordt gedaan, zijn we nagegaan of leerlingen daadwerkelijk problemen ervaren als ze een wiskundeopgave maken uit een methode die gebaseerd is op de ideeën van de Realistische Wiskunde.

Theoretisch kader

In het wiskundeonderwijs wordt een beroep gedaan op tekstbegripvaardigheden van leerlingen: leerlingen moeten de wiskundeopgave in de context goed kunnen lezen, begrijpen waar de opgave over gaat en weten wat er van hen wordt verwacht. Om een opgave te kunnen begrijpen, moeten leerlingen allereerst begrip construeren van de wiskundetaak.

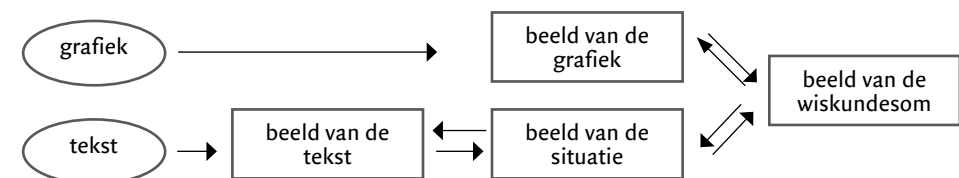
In dit onderzoek kijken we naar een wiskundeopgave uit het domein Grafieken. Hierbij kunnen leerlingen gebruik maken van de informatie uit drie bronnen: de introductietekst van de opgave (‘het verhaaltje’), de vragen bij de opgave en de grafiek. Leerlingen moeten deze drie informatiebronnen niet alleen los van elkaar goed begrijpen, maar ze ook nog op een betekenisvolle manier aan elkaar verbinden. De grafiek krijgt pas echt betekenis op het moment dat leerlingen het verhaaltje in de tekst op de juiste manier aan het verloop van de grafiek kunnen koppelen.

Leerlingen die moeite hebben om de opgave succesvol op te lossen, hebben dus de informatie uit minstens één van deze drie bronnen niet goed begrepen. Om deze bron van het probleem te kunnen benoemen, hebben we gebruik gemaakt van het model van English en Halford (1995) en dit aangepast voor ons eigen onderzoek (zie Figuur 1). In de cirkels staan de beschikbare informatiebronnen en in de rechte vakken de mentale representaties geconstrueerd op basis van deze bronnen.

English en Halford (1995) beschrijven drie mentale stappen in het oplossingsproces van wiskundesommen: het construeren van een *problem-text model*, het construeren van een *problem-situation model* en het construeren van een *mathematical model*. Met het *problem-text model* (beeld van de tekst) bedoelen we het beeld dat de leerling vormt van de wiskundesom op basis van de aanwezige tekstuele informatie. Op basis van dit beeld zal de leerling kennis

van de wereld inzetten en inferenties maken om tot een interpretatie van de tekstuele informatie te komen. Zo construeert hij het *problem-situation model* (beeld van de situatie), het mentale model waarin hij betekenis geeft aan de tekst. Omdat de leerling een wiskundige tekst aan het lezen is, krijgt hij ook informatie over de wiskundige operaties. De afleiding van de rekenkundige structuur van de wiskundesom vindt plaats in het *mathematical model* (beeld van de wiskundesom).

Omdat we in dit onderzoek kijken naar een wiskundeopgave uit het domein Grafieken, hebben we het model van English en Halford uitgebreid met een vierde component, het *graphic model* (beeld van de grafiek). In een wiskundetaak uit het domein grafieken heeft de lezer namelijk twee informatiebronnen tot zijn beschikking: tekstuele informatie (de tekst van de opgave en de tekst bij de grafiek) en visuele informatie (de grafiek). Op basis van het verloop van de grafiek en de gegevens van de assen construeert de lezer dit beeld van de grafiek. Met het beeld van de grafiek verwijzen we naar de representatie van de grafiek op het moment dat er nog geen verband is gelegd met de achterliggende situatie. Volgens onze definitie zijn in de constructie van dit beeld van de grafiek wiskundige assumpties belangrijk. De grafiek, geconstrueerd in het beeld van de grafiek, wordt echter pas werkelijk betekenisvol als deze in combinatie met het beeld van de situatie geïntegreerd wordt tot een beeld van de wiskundesom, met andere woorden: als de



Figuur 1: Ons model voor het begrijpen van grafiektaken

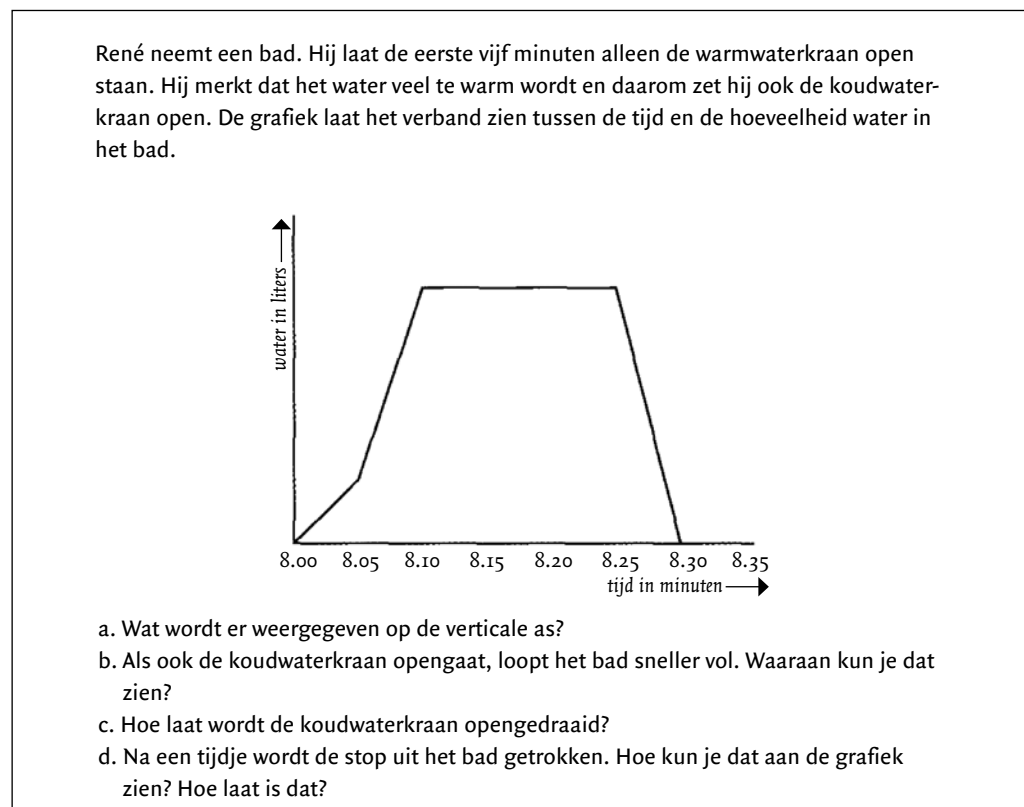
lezer de beschreven situatie koppelt aan de 'tekening' van de grafiek.

Omdat alle componenten van elkaar afhankelijk zijn, zullen leerlingen niet succesvol zijn in het oplossen van een wiskundesom als één van de componenten niet correct of niet compleet geconstrueerd is. Als een leerling bijvoorbeeld moeite heeft met het interpreteren van de tekst, dan kan hij problemen hebben met het construeren van het juiste beeld van de situatie. Als gevolg daarvan zal de leerling niet in staat zijn om het juiste beeld van de wiskundesom te construeren of hij construeert een ander, niet gewenst, beeld van de wiskundesom (English en Halford, 1995). Voor ons onderzoek is het interessant om te kijken waar in het proces van het begrijpen van wiskundetaken leerlingen problemen hebben.

Onderzoeksopzet

De vraag die in dit onderzoek centraal staat is: wat is de bron van onbegrip van leerlingen tijdens het oplossen van een wiskundetaak? We hebben 17 brugklasleerlingen hardopdenkend een wiskundesom laten maken (zie Figuur 2). In deze opgave moesten de leerlingen een grafiek interpreteren die hoorde bij het verhaaltje over René die een bad neemt. De grafiek laat het verband zien tussen de tijd en de hoeveelheid water in het bad.

Om het begripsconstructieproces van een wiskundetaak in het domein grafieken te kunnen onderzoeken, analyseren we het taalgebruik dat leerlingen hanteren bij het oplossen van een wiskundeopgave uit dit domein. Eerst hebben we de leerlingen zelf hun ant-



Figuur 2: Opgave uit *Moderne wiskunde* (Breugel e.a., 1998: p.146)

woord laten formuleren. Hierdoor konden we zicht krijgen op de vraag of ze in staat waren de opgave zelfstandig succesvol op te lossen. Vervolgens hebben we de leerlingen gevraagd hun antwoord op de vraag toe te lichten. Bij de leerlingen die succesvol waren in het oplossen van de opgave konden we in deze toelichting zien of hun juiste antwoord inderdaad gebaseerd was op goed begrip van de opgave. Bij de leerlingen die niet succesvol waren, probeerde de onderzoeker in deze toelichtingfase te achterhalen waarom ze de opgave niet succesvol konden oplossen. De verbale respons van de leerlingen is vastgelegd op video en audio. Van alle leerlingen zijn de protocollen getranscribeerd en geanalyseerd.

We hebben geconstateerd dat leerlingen drie soorten problemen kunnen hebben. Ze kunnen problemen hebben met de wiskunde in de opgave (het interpreteren van de grafiek in de opgave en het aflezen van de grafiek), maar ze kunnen ook problemen hebben met de talige eisen die de opgave aan hen stelt: het begrijpen van de tekst van de opgave. In de volgende paragrafen illustreren we de resultaten van het onderzoek aan de hand van enkele voorbeelden. Voor een volledig overzicht van de gevonden resultaten verwijzen we naar Prenger (2005).

Problemen met het construeren van het beeld van de tekst

De eerste stap in het succesvol oplossen van een wiskundeopgave is het goed begrijpen van de tekst, zowel van de introductietekst als van de vragen. Als leerlingen de tekst niet goed begrijpen, dan kunnen ze de opgave niet oplossen. Dit zien we gebeuren bij Meryem. Zij leest vraag A in de opgave over René voor ('Wat wordt er weergegeven op de verticale as?'), maar is niet in staat een antwoord te geven op deze vraag.

Meryem: (leest voor) nou, als de weergegeven verticaal is, wat wordt de weergegeven op de verticale as? dat weet ik niet

Onderzoeker: nou wat denk je?

Meryem:

Onderzoeker: waarom weet je dat niet? [...]

Onderzoeker: dus ze bedoelen iets met die verticale as en dan vragen ze wat wordt er weergegeven?

Meryem:

Onderzoeker: wat zouden ze ermee bedoelen, denk je?

Meryem: ik weet niet wat weergegeven is.

Uit de manier waarop Meryem de vraag voorleest, kunnen we al constateren dat Meryem de tekst niet goed begrijpt. Uit het gesprekje dat volgt met de onderzoeker blijkt dan ook dat Meryem niet weet wat 'weergegeven' betekent. Door het niet kennen van dit woord is ze niet in staat om het juiste antwoord te geven, terwijl ze wiskundig prima blijkt te weten wat ze op de verticale as kan aflezen.

Zoals gezegd worden in het wiskundeboek ook vaak laagfrequente dagelijkse woorden gebruikt. In de gesprekken die we met de leerlingen gevoerd hebben, bleek dat leerlingen hier inderdaad problemen mee kunnen hebben. Zo zagen we bijvoorbeeld dat een andere leerling, Leila, niet wist wat het woord 'stop' betekende en daardoor de vraag 'Hoe laat wordt de stop uit het bad getrokken?' niet kon beantwoorden. Leila realiseerde zich echter niet dat ze de vraag niet goed begrepen had en gaf toch een antwoord. Dit antwoord was echter niet correct, want ze benoemde het moment dat de kraan stopt in plaats van het moment waarop de stop uit het bad werd getrokken.

Problemen met het refereren aan het beeld van de grafiek

Bij Nirmala zien we meteen dat zij geen probleem heeft in het construeren van het beeld van de tekst en haar beeld van de situatie. Op de vraag hoe je aan de grafiek kunt zien dat de stop uit het bad wordt getrokken, antwoordt ze meteen 'kan je hier aan zien dan # geloof ik, omdat die water hier wat naar beneden gaat'. Ze heeft haar beeld van de situatie dus succesvol geïntegreerd in haar beeld van de wiskundesom. Alleen in haar beeld van de grafiek zit een probleem, want op vraag 'Hoe laat is dat?' geeft ze toch een verkeerd antwoord:

Onderzoeker: dus eh wat moeten we nou zeggen dan?
 Onderzoeker: na een tijdje wordt de stop ...?
 Nirmala: uh dat kun je aan de grafiek zien omdat de lijn omlaag gaat.
 Onderzoeker: ja.
 Nirmala: en dat was om ongeveer half negen.

Als Nirmala dit laatste antwoord ('dat was om ongeveer half negen') zou hebben opgeschreven, zou het niet goedgekeurd worden. Nirmala geeft hier in feite een afronding van een tijdsschatting, maar in de grafiek is goed af te lezen dat het bad om half negen al helemaal leeg is. Uit de interactie die volgt, blijkt echter dat Nirmala prima begrepen heeft waar het in deze opgave om gaat.

Problemen met het construeren van het beeld van de wiskundesom

Een correct antwoord hoeft niet altijd te wijzen op succesvolle integratie van het beeld van de grafiek en het beeld van de situatie in het beeld van de wiskundesom. Assad, bijvoorbeeld, geeft het juiste antwoord op

de vraag 'Na een tijdje wordt de stop uit het bad getrokken. Hoe laat is dat?'. Hij lijkt dus een goed beeld van de wiskundesom geconstrueerd hebben van de opgave, maar als de onderzoeker Assad vraagt om zijn antwoord te toe te lichten en nog wat verder uit te leggen, blijkt dit toch niet het geval te zijn:

Assad: betekent dat het water weggaat.
 Onderzoeker: oh.
 Assad: nu zit het water tot en met hier vol.
 Onderzoeker: jaja.
 Assad: en je zeg maar dan de kraan uit doet.
 Assad: eh als je die dan ...
 Assad: de stop er ...
 Assad: bijvoorbeeld de stop is hier. [tekent stop in de grafiek!]
 Onderzoeker: ja.
 Assad: als je die dan er uit trekt dan gaat dit water allemaal weg.
 Onderzoeker: hier zit de stop? [wijst in de grafiek de getekende stop aan en lacht].
 Assad: ja, niet echt
 Onderzoeker: ja in het bad.
 Assad: dan daalt ie.
 Onderzoeker: jaja, dus dit is eigenlijk het bad?
 Assad: ja.
 Assad: zeg maar dit is de water in de bad [= wijst grafiek aan].
 Onderzoeker: ja.
 Assad: en nu hij is nu tot zo ver vol.
 Onderzoeker: ja.
 Assad: en hij trekt de stop er uit dan gaat ie zakken, zakken, zakken.
 Onderzoeker: oh.

Uit dit fragment blijkt dat Assad weliswaar geen problemen heeft met het beantwoorden van de vragen, maar dat hij de grafiek als iconische representatie van de situatie ziet (dus als een tekening die iets afbeeldt) in plaats van als mathematische representatie. Hij stelt

het verloop van de grafiek één op één met het water in het bad en tekent zelfs een kruisje op de x-as om aan te geven dat daar de stop zit. Dat Assad hier toch in eerste instantie een goed antwoord op de vraag formuleert, is dus waarschijnlijk te danken aan het feit dat een iconische interpretatie van de grafiek de leerlingen in deze opgave niet hindert bij het vinden van het juiste antwoord.

Samenvatting, conclusie en aanbevelingen

In dit onderzoek hebben we bekeken hoe leerlingen in hardopdenkprotocollen onbegrip demonstreren. Uit de analyse van de protocollen van de leerlingen hebben we kunnen vaststellen dat er vier verschillende manieren zijn waarop leerlingen onbegrip kunnen tonen: 1) de leerlingen hebben een begripsprobleem, maar de oorzaak van dit onbegrip is moeilijk te duiden; 2) de leerlingen hebben moeite met het construeren van het beeld van de tekst; 3) de leerlingen formuleren een onjuist antwoord waarbij ze moeite hebben met het refereren aan het beeld van de grafiek; 4) de leerlingen formuleren een onjuist antwoord waarbij ze moeite hebben met het construeren van het beeld van de wiskundesom. In Tabel 1 geven we een overzicht van deze demonstratiepatronen van onbegrip per deelvraag in de wiskundeopgave voor alle 17 leerlingen.

Het patroon in de demonstraties van onbegrip dat het meeste voorkomt, is patroon 2. Zeker een kwart van de leerlingen bleek op een zeker moment bij het uitvoeren van deze taak in de problemen te komen door moeilijkheden bij het construeren van het beeld van de tekst. Bij de meeste leerlingen ontstond het probleem doordat ze een woord in het geheel niet bleken te kennen. We hebben daarbij gezien dat leerlingen verschillen in de mate waarin ze zelf onderkennen dat ze een woord niet weten. De ene leerling geeft zelf expliciet aan dat ze bijvoorbeeld niet weet wat 'weergegeven' betekent, bij een andere leerling blijkt uit de interactie dat ze niet weet wat bijvoorbeeld 'stop' betekent.

We hebben in dit onderzoek diverse potentiële struikelblokken en tekstbegripproblemen gesignaleerd. Een belangrijke implicatie voor het wiskundeonderwijs is daarom dat er meer aandacht moet zijn voor het proces van tekstreconstructie. Als wiskundedocenten zich bewust zijn van de verschillende stappen die een leerling moet zetten om tot een succesvolle oplossing te komen, kunnen ze bij een hulpvraag van een leerling achterhalen wat hij niet begrijpt: de wiskunde of de tekst van de opgave. Voor zowel de docent als de leerling is het belangrijk zich te realiseren waar het bij de leerling misgaat. De leerling kan zich zo bewust worden van hiaten in de eigen kennis of taalvaardigheid, wat belangrijk is voor de eigen (taal)ontwikkeling, en de

Demonstratiepatroon	vraag A	vraag B	vraag C	vraag D	Totaal
1 oorzaak onbegrip onduidelijk	0	1	1	0	2
2 problemen met het beeld van de tekst	5	0	2	4	11
3 problemen met het beeld van de grafiek	0	0	0	1	1
4 problemen met het beeld van de wiskundesom	0	0	0	2	2

Tabel 1: Totaal overzicht van demonstratiepatronen van onbegrip per deelvraag

docent kan zich bewust worden van de aard van de problemen van de leerling, waardoor de docent de leerlingen gerichter kan helpen. Leerlingen die problemen hebben met de tekst kunnen dan steun krijgen bij het ontwikkelen van begrip van de opgave, terwijl leerlingen die problemen hebben met de wiskunde steun kunnen krijgen in de wiskundige processen.

De didactiek van de Realistische Wiskunde leent zich gelukkig goed voor een meer taalontwikkelingsgerichte benadering van docenten. Volgens deze didactiek zou er meer ruimte moeten zijn voor leerlingen om zelf mee te praten en al pratend zelf kennis te vormen over de wiskunde. Dit idee sluit goed aan bij de didactiek van het Taalgericht Vakonderwijs (Hajer & Meestringa, 2004; Hajer, 2005), waarin wordt benadrukt dat er beter onderwijs ontstaat als leerkrachten in de zaakvaklessen meer aandacht besteden aan taal. In beide didactische visies wordt gewerkt vanuit betekenisvolle contexten en wordt het belang van interactie benadrukt. Er zou dus meer interactie moeten plaatsvinden tussen leerlingen en docenten tijdens en bij het oplossen van wiskundeopgaven. Praten over teksten vergroot het begrip. De mogelijkheid om te praten neemt toe door leerlingen samen te laten werken aan opgaven. Bij samenwerkend leren werken leerlingen in groepjes van twee of meer aan een opdracht. Leerlingen worden in zo'n opdracht gestimuleerd om actief taal te gebruiken, bijvoorbeeld om hun mening te geven of hun argument te onderbouwen. Op deze manier kan samenwerkend leren dus een bijdrage leveren aan de taalverwerving van leerlingen.

Het is dus belangrijk in de reken- of wiskundeles uit te gaan van de kansen voor taalgericht vakonderwijs die het talige wiskundeboek biedt. Door aandacht te hebben voor de teksten van de wiskundeopgave kan de wiskundedocent bijdragen aan de tekstbegripontwikkeling van leerlingen en kan hij

bovendien de taalvaardigheid en woordenschat van leerlingen vergroten.

LITERATUUR

Breugel, I., Gelderblom, G., Goemans, H., Horst, A. van der., Humblé, I., & Koning, A. (1998). *Moderne Wiskunde 1a vbo mavo (7e editie)*. Groningen: Wolters Noordhoff.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hajer, M., & Meestringa, T. (2004). *Handboek Taalgericht Vakonderwijs*. Bussum: Coutinho.

Hajer, M. (2005). Taalgericht vakonderwijs: tijd voor een nieuw vijfjarenplan. *Levende Talen Tijdschrift*, 6(1), 3-11.

Prenger, J. (2001). Vocabulaire hindernissen bij wiskunde. *Toegepaste Taalwetenschap in Artikelen*, 66, 53-68.

Prenger, J. (2005). *Taal telt! Een onderzoek naar de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in het realistisch wiskundeonderwijs*. Proefschrift, Rijksuniversiteit Groningen.

Prenger, J. (2006). Woorden tellen mee. Een onderzoek naar talige struikelblokken in het wiskundeboek. *Levende Talen Tijdschrift*, 7(3), 17-24.

JOANNEKE PRENGER werkt als projectleider voortgezet onderwijs bij het Expertisecentrum taal, onderwijs en communicatie (Etoc) aan de Rijksuniversiteit Groningen en is als docent betrokken bij het Instituut Service Management (ISM) van de Christelijke Hogeschool Nederland. E-mail: J.Prenger@rug.nl

Niemand legt hier ook wat uit! Lijdt de schrijfvaardigheid van bovenbouw- leerlingen onder zelfstandig werken?

LOUISE CORNELIS, ROBERT VAN ATTEN, CHRISTEL BARENDSE, INGE CONRADI, MINEKE DAVIDSE, MAAIKE GOVERS, NICOLETTE IMMERZEEL, ARMAND JONKER, MARTIJN KNOOK, RIC LEIJH, SAPANA RAJARAM, OLGA SMIT EN EVA WIERSMA

De overgang van de derde naar de vierde klas is op havo en vwo een grote stap. In de bovenbouw wordt opeens een grote mate van zelfstandigheid van de leerlingen verwacht. Is het daarom dat vierdeklassers slechter lijken te schrijven dan derdeklassers? Is dat zo, en zo ja, hoe komt dat dan en wat is eraan te doen? Dit zijn de vragen waarop dit artikel antwoord wil geven.

Schrijft de bovenbouw slechter?

Om te onderzoeken of bovenbouwers slechter schrijven dan onderbouwers, hebben wij een praktijkonderzoek uitgevoerd. Het onderzoek werd uitgevoerd op acht verschillende scholen, onder 489 leerlingen: vijf klassen havo-3, vijf klassen havo-4, drie klassen vwo-3 en drie klassen vwo-4. Van elk van deze klassen is één van de auteurs van dit artikel de docent Nederlands.

De leerlingen kregen de opdracht een betoog te schrijven over het onderwerp schooluniformen. Zij moesten stelling nemen voor of tegen de verplichte invoering daarvan op hun eigen school en hun stellingname onderbouwen. Alle klassen kregen schriftelijke informatie over het onderwerp en een

werkwijzer. Aangezien derdeklassers minder ervaring hebben met het schrijven van een betoog, was hun werkwijzer uitgebreider dan die van de vierdeklassers (zie Bijlage 1).

Vrijwel alle klassen reageerden positief op de opdracht en gingen geconcentreerd en gemotiveerd aan het werk. De leerlingen werkten zelfstandig, gedurende twee lessen. In het eerste lesuur maakten ze de kladversie; in het tweede de netversie. De netversies werden geanonimiseerd, zodat de beoordelaar, één van de andere auteurs van dit artikel, in de meeste gevallen niet wist of hij of zij een onder- of bovenbouwklas beoordeelde.

De betogen zijn beoordeeld op de volgende criteria:

1. Zijn er in de tekst minimaal vier en maximaal acht alinea's zichtbaar?
2. Heeft de tekst een titel?
3. Staat er een stelling in de inleiding?
4. Bevat de tekst minstens één relevant signaalwoord?
5. Zijn alle bijzinnen verbonden met een hoofdzin?
6. Beginnen alle zinnen met een hoofdletter?
7. Staan er meer dan twee d/t-fouten in de tekst?

We zijn ons ervan bewust dat deze beoorde-